

Modelización matemática de una montaña: Un enfoque praxeológico en la enseñanza de cálculo integral para ingenieros

Autor: Manuel Ixrael Silva Contreras

Resumen

El estudio tiene como objetivo una propuesta didáctica para la enseñanza del cálculo integral a estudiantes de ingeniería mediante la modelización matemática de una montaña. Utilizando la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) como marco teórico, se analiza una actividad donde los estudiantes deben tomar fotografías de un cerro, proponer una función matemática que modele su superficie y calcular su volumen. A través de un análisis praxeológico, se desglosan los componentes fundamentales de la actividad: tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías. Esta aproximación busca no solo mejorar la comprensión del cálculo integral, sino también acercar la práctica profesional a la enseñanza matemática, fomentando habilidades críticas y analíticas esenciales para los futuros ingenieros.

Palabras clave: Modelización matemática, Cálculo integral, Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), Ingeniería, Análisis praxeológico

Introducción.

La enseñanza de cálculo integral en el nivel de educación superior, particularmente en carreras de corte tecnológicas, enfrenta el desafío de conectar los conceptos teóricos con aplicaciones prácticas que resulten significativas para los estudiantes. Las materias del tronco común suelen ser netamente teóricas, lo que provoca un índice de reprobación en la Educación Superior (ES) bastante considerable; además, los alumnos visualizan estas asignaturas como entes aislados, sin una conexión directa con su eje profesionalizante; cuando lo deseable es que en las materias del tronco común se enfatice la integración de contenidos vinculados en forma estrecha con la inteligencia artificial y la producción tecnológica, para preparar a los futuros ingenieros de tal forma que estén en condiciones de afrontar los cambios que impone el mundo globalizado. El reto que enfrenta el autor es la falta de herramientas didácticas para producir habilidades matemáticas (enfocadas a la ingeniería), necesarias para la nueva generación de ingenieros, pues en los planes de estudio y libros solo se encuentra el contenido que se debe abordar (el qué), pero no se muestran las actividades didácticas para lograr el conocimiento de dicho contenido (el cómo). En este contexto, la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) ofrece un marco teórico adecuado para desarrollar actividades de aprendizaje que modelen situaciones reales, promoviendo así una comprensión profunda y práctica de los conceptos matemáticos.

El estudio propone una actividad didáctica fundamentada en la modelación matemática, en la que los estudiantes deben calcular el volumen de una montaña mediante el uso

de la integración, un tema fundamental en el cálculo integral y relevante para la formación de ingenieros. El enfoque metodológico de esta propuesta es cualitativo, ya que se centra en analizar y entender cómo la aplicación de una actividad didáctica específica puede influir en la comprensión y motivación de los estudiantes hacia el cálculo integral. A través de la observación y el análisis de las respuestas de los estudiantes, este estudio pretende identificar de qué manera la modelación matemática aplicada a situaciones prácticas mejora su aprendizaje y conexión con el cálculo integral. La investigación se centra en ¿cómo influye la implementación de una actividad didáctica basada en modelación matemática en la comprensión y motivación de los estudiantes de ingeniería para el aprendizaje del cálculo integral?, cuyo objetivo general es evaluar el impacto de una actividad didáctica basada en la modelación matemática para calcular el volumen de una montaña mediante integración, con el fin de mejorar la comprensión y motivación de los estudiantes de ingeniería en el aprendizaje del cálculo integral. Con esta propuesta, se busca fortalecer el aprendizaje de los estudiantes, dotándolos de herramientas matemáticas aplicadas que resulten útiles y relevantes en su desarrollo profesional, al tiempo que se explora el potencial de la TAD para diseñar actividades didácticas significativas en el ámbito de la ingeniería.

La validez y confiabilidad de los resultados obtenidos en el análisis de los proyectos de los estudiantes se fundamentan en la rigurosidad con la que se examinan los cuatro componentes de la praxeología: tipos de tareas (T), técnicas (τ), tecnologías (θ) y teorías (Θ). La validez se asegura al evaluar en qué medida las tareas reflejan situaciones reales

y permiten a los estudiantes comprender la aplicación práctica del cálculo integral en su futura práctica profesional, así como al examinar si las técnicas empleadas son adecuadas y precisas para resolver los problemas planteados. Por otro lado, la confiabilidad se establece a través de la consistencia en la evaluación de los fundamentos y justificaciones de las técnicas utilizadas, así como en la capacidad de los estudiantes para integrar conocimientos de diversas áreas y reflexionar críticamente sobre sus resultados. Al analizar la comprensión de los fundamentos teóricos y la habilidad de los estudiantes para identificar errores y sugerir mejoras, se garantiza que los hallazgos sean replicables y sustentados en un enfoque analítico sólido. En conjunto, estos criterios permiten no solo evaluar el desempeño de los estudiantes, sino también fortalecer la calidad educativa del proceso de aprendizaje.

Marco Teórico

En esta sección se explica la teoría antropológica de lo didáctico, considerando el modelo praxeológico extendido, el cual permite analizar praxeologías matemáticas. Chevallard, propone que, en lugar de estudiar conceptos, técnicas y procedimientos, se estudien cuestiones (Q). Las situaciones sociales (no necesariamente en el aula) dependen de una tripleta didáctica (X, Y, O), donde X son los aprendices, los guías que orientan este aprendizaje son denotados por la Y, (se puede considerar un grupo) y la obra (O), que es el material o inmaterial creado por acción humano para funciones específicas (cuentos, folletos, etc.), en este marco, se considera que la didáctica de las matemáticas se efectúa cuando las obras pertenecen al contenido de las matemáticas.

Es fundamental enunciar los principios fundamentales en la TAD, los que son: (1) La educación es un proceso que se desarrolla a lo largo de la vida, y no solo en los años escolares. (2) Para aprender las obras los aprendices necesitan, ayuda de algunas guías, (en diferentes escenarios la X pueden ser las Y). El objetivo es crear un nuevo conocimiento, por medio de alguna cuestión (Q), para que los aprendices obtengan alguna respuesta (R). Esta respuesta puede que no sea verdadera o válida, para la TAD esta respuesta creada por los aprendices se denotará con R , para llegar a una respuesta apropiada los aprendices debe de utilizar herramientas (matemáticas o no matemáticas) y producir una respuesta apropiada simbolizada como R . El proceso de búsqueda de convertir R en R se le conoce como Recorrido de Estudio e Investigación (REI), para conseguir R los aprendices deben de utilizar el conocimiento relativo o parcial adquirido por R , así como el de las obras. La manera como los indagadores (X) van a aprender o vuelven aprender es mediante el recorrido de estudio e investigación. El postulado base de la TAD admite que toda actividad humana puede describirse con un modelo único, que se resume con la palabra praxeología.

Chevallard explica que la praxeología cuenta con cuatro componentes: tipo de tarea (lo que se hace), técnica (la forma o manera en que se hace la tarea), tecnología (porque lo hago así, justifica la técnica) y teoría (es el discurso que justifica la tecnología). Siero González explica que Castela y Romo-Vázquez, dividen la tecnología en dos componentes (teórica y práctica) a lo que se le conoce como praxeología matemática o modelo praxeológico extendido. La componente teórica genera discursos que validen las

técnicas matemáticas, por su parte la componente práctica valida el uso de las técnicas matemáticas para la resolución de tareas. Este enfoque permite analizar cómo se enseñan y aprenden las matemáticas en diferentes contextos, y cómo las prácticas educativas pueden ser diseñadas para fomentar una comprensión más profunda y aplicada del conocimiento matemático. La TAD puede proporcionar una estructura para desarrollar actividades didácticas que conecten la teoría matemática con problemas reales de ingeniería. Al utilizar praxeologías relevantes para la ingeniería, los estudiantes pueden ver más claramente la aplicación de las matemáticas en su futura profesión.

En el marco del estudio sobre la implementación de la modelación matemática como estrategia didáctica, diversas investigaciones recientes han proporcionado aportes significativos que destacan tanto su efectividad como sus retos y aplicaciones en contextos educativos. Diferentes autores convergen en torno al potencial de esta metodología para fomentar el aprendizaje significativo, el desarrollo de competencias y la motivación de los estudiantes. Hidayat et al. (2022) destacan que la modelación matemática, cuando se implementa mediante metodologías activas, permite a los estudiantes abordar problemas reales en un proceso completo de modelado, lo que mejora tanto la comprensión conceptual como la capacidad de resolución de problemas matemáticos. Este enfoque holístico encuentra eco en el trabajo de García Ocampo (2023), quien resalta que los procesos de aprendizaje activo, incluyendo la modelación matemática, son esenciales para el desarrollo de competencias

profesionales en ingeniería, preparando a los estudiantes para contextos laborales complejos y dinámicos. Sin embargo, Hidayat et al. (2022) también analizan la posibilidad de enfoques atomísticos en el modelado, señalando que un balance entre estos y los enfoques holísticos podría ser eficaz para medir competencias específicas y adaptar la enseñanza a necesidades particulares. En consonancia, Montero Moguel y Vargas Alejo (2022) muestran cómo los ciclos de modelación pueden evolucionar desde modelos lineales hacia exponenciales, subrayando la importancia de una evaluación detallada que permita caracterizar la calidad de los modelos construidos por los estudiantes.

Desde una perspectiva orientada al contexto social y cultural, Soto (2020) enfatiza que la modelación matemática debe considerar las características propias de las comunidades educativas. Utilizando la teoría socioepistemológica, Soto propone diseñar actividades que no solo desarrollen competencias matemáticas, sino que también fomenten la reflexión sobre los usos sociales del conocimiento matemático, un enfoque que también es valorado por Bejarano-Godoy (2022) en el contexto de la educación básica. Por otro lado, Perin y Campos (2020) amplían la discusión al ámbito de la educación estadística, donde la modelación matemática se presenta como una herramienta para desarrollar competencias críticas y analíticas. Este enfoque resuena con el análisis de Sabatinelli y Llanos (2024), quienes argumentan que la integración de estrategias de modelación en los planes de estudio de ingeniería no solo fortalece la comprensión matemática, sino que también alinea la formación académica

con las demandas del mercado laboral actual. Finalmente, Rothschuh-Dávila (2023) demuestra cómo la modelación matemática puede trascender su aplicación en las matemáticas tradicionales, explorando su uso en el diseño arquitectónico. Este enfoque evidencia que la modelación no solo fomenta la creatividad y la resolución de problemas, sino que también abre nuevas posibilidades pedagógicas en disciplinas como la arquitectura. Estas investigaciones ofrecen un panorama integral que refuerza la relevancia de la modelación matemática como eje central en el diseño de actividades didácticas. Su implementación, aunque diversa en enfoques, converge en la necesidad de promover un aprendizaje activo, contextualizado y orientado a la práctica profesional.

Metodología

La metodología empleada en este proyecto integrador se basa en un enfoque práctico y colaborativo, en el que los estudiantes de ingeniería aplican conocimientos de Cálculo Integral para modelar un cerro en tres dimensiones y calcular su volumen, utilizando herramientas adecuadas que faciliten la visualización del modelo y permitan un análisis más profundo del sólido de revolución que se genera a partir de la función matemática. Este proyecto integrador será desarrollado en equipos conformado por estudiantes de ingeniería que cursan la asignatura de Cálculo Integral. El objetivo es realizar un modelo en tres dimensiones de un cerro (montaña), así como estimar su volumen.

Los pasos a seguir son: (1) Toma de Fotografías. Fotografía Inicial: Cada equipo

deberá seleccionar un lugar específico para realizar la fotografía. Es fundamental que la fotografía sea clara y detallada del cerro desde una posición fija. Fotografías Circundantes: Todos los integrantes del equipo deben elegir otro lugar a la misma distancia circundante desde el cual tomar una fotografía adicional del cerro. (2) Proposición de una Función. Análisis de Imágenes: Cada integrante debe analizar su fotografía para identificar puntos clave de elevación y contorno del cerro, y así proponer una función matemática que represente la superficie del cerro utilizando los datos visuales. Ajuste de la Curva: Es recomendable utilizar software de análisis de datos (como MATLAB, Python con bibliotecas de numpy y scipy, o Excel) para ajustar la curva a los datos obtenidos de las fotografías. Es de suma importancia calcular el coeficiente de determinación para evaluar la precisión del ajuste de la función propuesta. (3) Graficación en 3D. Uso de Software de Graficación: Deben utilizar un graficador en 3D (como MATLAB, Python, GeoGebra o software específico de modelación 3D) para visualizar la función propuesta en tres dimensiones. Con el software se debe generar una gráfica 3D cuando la función se hace rotar visualizando el sólido en revolución. (4) Cálculo del Volumen. Cálculo Individual: Cada integrante del equipo debe calcular el volumen del sólido de revolución de manera individual utilizando la técnica de integración doble. (5) Estimación de Volumen Promedio. Promedio por Equipo: Reunir los volúmenes calculados por cada miembro del equipo y con esta información estimar un volumen promedio para el equipo. (6) Conclusión. Reflexión y Análisis: Redactar una conclusión grupal que incluya; análisis de la precisión y confiabilidad de los datos obtenidos y del modelo matemático propuesto; reflexión

sobre las posibles fuentes de error y cómo podrían mejorarse los métodos utilizados; discusión sobre la relevancia y aplicación de la modelación matemática en contextos de ingeniería. Entregables del proyecto. Formato de Entrega: (a) Reporte Escrito: Introducción: Descripción del objetivo y metodología utilizada. Desarrollo: Detalle de cada uno de los pasos seguidos, incluyendo fotos, funciones propuestas, cálculos de ajuste, gráficas en 3D y cálculos de volumen. Conclusión: Análisis y reflexiones finales. (b) Presentación: Presentación en clase donde cada equipo exponga su trabajo, mostrando las gráficas en 3D y discutiendo los resultados y conclusiones.

El método seleccionado es esencial para integrar teoría y práctica, fomentando el aprendizaje colaborativo y la aplicación de herramientas tecnológicas. Al involucrar a los estudiantes en la toma de decisiones sobre la selección de fotografías y la propuesta de funciones, se estimula el pensamiento crítico y la creatividad en la resolución de problemas. Además, el uso de software especializado no solo facilita el análisis de datos, sino que también prepara a los estudiantes para el uso de herramientas que son relevantes en el ámbito profesional. La etapa final de cálculo y discusión de resultados permite una reflexión colectiva sobre la precisión de los datos obtenidos y la relevancia de la modelación matemática en la ingeniería, promoviendo un aprendizaje profundo y significativo que trasciende el aula. La validez y confiabilidad de los resultados obtenidos en el análisis de los proyectos de los estudiantes se fundamentan en la rigurosidad con la que se examinan los cuatro componentes de la praxeología: tipos de tareas (T), técnicas (τ), tecnologías (θ) y teorías (Θ). La validez

se asegura al evaluar en qué medida las tareas reflejan situaciones reales y permiten a los estudiantes comprender la aplicación práctica del cálculo integral en su futura práctica profesional, así como al examinar si las técnicas empleadas son adecuadas y precisas para resolver los problemas planteados. Por otro lado, la confiabilidad se establece a través de la consistencia en la evaluación de los fundamentos y justificaciones de las técnicas utilizadas, así como en la capacidad de los estudiantes para integrar conocimientos de diversas áreas y reflexionar críticamente sobre sus resultados. Al analizar la comprensión de los fundamentos teóricos y la habilidad de los estudiantes para identificar errores y sugerir mejoras, se garantiza que los hallazgos sean replicables y sustentados en un enfoque analítico sólido. En conjunto, estos criterios permiten no solo evaluar el desempeño de los estudiantes, sino también fortalecer la calidad educativa del proceso de aprendizaje.

Análisis de Resultados

Se propone analizar los resultados separando los cuatro componentes de la praxeología: tipos de tareas (T), técnicas (τ), tecnologías (θ) y teorías (Θ). A continuación, se detalla cómo se deberían analizar estos proyectos utilizando la TAD.

(1) Análisis de los Tipos de Tareas (T). Descripción de las Tareas Realizadas: Identificar y describir las tareas principales y específicas que los estudiantes realizaron, como la toma de fotografías, la proposición de una función matemática, el ajuste de la curva, la graficación en 3D y el cálculo del volumen. Evaluar cómo cada tarea contribuye al objetivo global del proyecto y cómo se articula con las demás tareas. Contextualización

de las Tareas: Analizar en qué medida las tareas propuestas reflejan situaciones reales que los estudiantes podrían encontrar en su futura práctica profesional. Examinar si las tareas permiten a los estudiantes entender la relevancia y aplicación práctica del cálculo integral en ingeniería. (2) Análisis de las Técnicas (τ) Descripción de las Técnicas Utilizadas: Detallar las técnicas matemáticas y computacionales que los estudiantes emplearon para completar las tareas, como métodos de interpolación, técnicas de integración doble y uso de software de graficación en 3D. Evaluar la precisión y adecuación de las técnicas empleadas para resolver los problemas planteados. Evaluación de la Eficacia de las Técnicas: Analizar si las técnicas utilizadas permitieron a los estudiantes alcanzar resultados precisos y confiables. Identificar posibles dificultades que los estudiantes enfrentaron al aplicar estas técnicas y cómo las superaron. (3) Análisis de las Tecnologías (θ) Fundamentos y Justificaciones de las Técnicas: Examinar las justificaciones que los estudiantes proporcionaron para las técnicas utilizadas. Por ejemplo, por qué eligieron un método específico de interpolación o por qué emplearon una técnica particular de integración. Evaluar el entendimiento de los estudiantes sobre las tecnologías subyacentes a las técnicas utilizadas. Integración de Conocimientos: Analizar cómo los estudiantes integraron conocimientos de diferentes áreas (matemáticas, computación, ingeniería) para resolver las tareas. Evaluar si los estudiantes fueron capaces de justificar sus elecciones técnicas con argumentos sólidos basados en los principios teóricos correspondientes. (4) Análisis de las Teorías (Θ) Fundamentos Teóricos del Proyecto: Evaluar la comprensión de los estudiantes

sobre los fundamentos teóricos del cálculo integral y la interpolación de datos. Examinar si los estudiantes fueron capaces de conectar las teorías matemáticas con sus aplicaciones prácticas en la modelización de la montaña. Capacidad de Reflexión y Abstracción: Analizar si los estudiantes demostraron la capacidad de reflexionar sobre sus resultados, identificar fuentes de error y sugerir posibles mejoras en sus métodos. Evaluar la profundidad de las conclusiones y análisis finales presentados por los estudiantes, considerando su capacidad para abstraer y generalizar sus hallazgos.

Conclusiones

La incorporación de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) en el diseño de actividades didácticas basadas en modelación matemática representa una estrategia pedagógica transformadora en la enseñanza del cálculo integral en la formación de ingenieros. Al vincular de manera efectiva los conceptos teóricos con su aplicación práctica, este enfoque fomenta un aprendizaje más profundo y significativo, preparando a los estudiantes para enfrentar los retos de su futura vida profesional (Gascón y Nicolás, 2023). La TAD proporciona un marco valioso para integrar conocimientos matemáticos con contextos reales, promoviendo una formación profesional más pertinente y alineada con las demandas del mercado laboral. Este marco no solo mejora la comprensión conceptual y el dominio técnico de los estudiantes, sino que también refuerza su motivación y compromiso hacia el aprendizaje, al demostrar la utilidad práctica de los contenidos estudiados. El análisis praxeológico, una herramienta central de la TAD, permite evaluar los

proyectos estudiantiles no solo en función de sus resultados, sino también considerando los procesos cognitivos y prácticos que los estudiantes desarrollan durante su ejecución. Este enfoque holístico fomenta una comprensión más rica de los conceptos matemáticos y de su aplicación en problemas complejos, esenciales para la ingeniería

Asimismo, la implementación de metodologías activas, como el aprendizaje basado en problemas y el trabajo colaborativo, ha demostrado ser efectiva para desarrollar competencias de modelación matemática y pensamiento crítico, preparando a los estudiantes para abordar desafíos complejos de manera estructurada. Facilitando la adquisición de conocimientos teóricos y promoviendo habilidades prácticas esenciales para el ámbito profesional. No obstante, antes de generalizar esta propuesta, es fundamental realizar evaluaciones previas desde diversas perspectivas. Es crucial analizar su viabilidad técnica, considerando recursos como software especializado y materiales didácticos accesibles, así como su impacto pedagógico, asegurando que todas las actividades sean inclusivas y accesibles para todos los estudiantes. Adicionalmente, estudios piloto podrían identificar posibles áreas de mejora y ajustes necesarios para maximizar su efectividad.

La integración de la TAD y metodologías activas en la enseñanza del cálculo integral tiene un gran potencial para transformar el aprendizaje matemático en ingeniería. Al cumplir con las evaluaciones necesarias, esta propuesta contribuirá a mejorar el aprendizaje y la motivación de los estudiantes, convirtiéndose en un modelo replicable y adaptable a otras disciplinas, promoviendo

una enseñanza matemática más relevante, inclusiva y profesionalmente orientada. Se anexa la rúbrica para la actividad.

Bibliografía

Bejarano-Godoy, N. A. (2022). El desarrollo de la competencia de modelación matemática en estudiantes de educación básica. *Episteme Koinonia: Revista Electrónica de Ciencias de la Educación, Humanidades, Artes y Bellas Artes*, 5(1), <https://doi.org/10.35381/e.k.v5i1.1797>.

García Ocampo, C. A. (2023). Procesos de aprendizaje activo, una opción para la formación de ingenieros civiles. Universidad del Quindío, <https://doi.org/10.26507/paper.2760>.

Gascón, J., & Nicolás, P. (2023). El papel de los juicios de valor en la ciencia didáctica. *Diálogo entre la teoría antropológica de lo didáctico y el enfoque ontosemiótico en educación matemática. Educación matemática*, 35(2), 47-68.

Hidayat, R., Adnan, M., Nizam Lee Abdullah, M. F., & Safrudiannur, S. (2022). A systematic review on mathematical modeling in educational context. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*.

Hidayat, R., Adnan, M., Nizam Lee Abdullah, M., & Safrudiannur, S. (2022). A systematic literature review of measurement of mathematical modeling in mathematics education context. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 18(5), <https://doi.org/10.29333/ejmste/12007>.

Montero Moguel, L. E., & Vargas Alejo, V. (2022). Ciclos de modelación y razonamiento covariacional al realizar una actividad provocadora de modelos. *Educación*

Matemática, 34(1), 214-248 DOI: <https://doi.org/10.24844/EM3401.08>.

Perin, A. P., & Campos, C. R. (2020). Reflexiones sobre la importancia de la modelación matemática como estrategia inductora de competencias estadísticas. *Revista Paradigma*, 41(2), 331-366.

Rothschuh-Dávila, R. (2023). El procedimiento figurativo, recurso que introduce al estudiante en la solución de la forma, analizado desde los resultados académicos. *Revista de Ingeniería y Arquitectura*, 2(2), 55-117.

Sabatinelli, P. A., & Llanos, V. C. (2024). Álgebra Lineal y Geometría Analítica en la formación de ingenieros en Argentina desde 1810 a la actualidad: análisis macrodidáctico. *Educación Matemática*, 36(1), 121-145. <https://doi.org/10.24844/EM3601.05>.

Soto, D. (2020). Diseño de situaciones de modelación. Una propuesta para la formación inicial de docente de matemática. *UCMaule*, 107-139 DOI: <http://doi.org/10.29035/ucmaule.58.107>.